

# Задача – 1.

Задание. Для балки, выбранной согласно варианту (рис. 17), требуется:

- построить эпюры  $M$  и  $Q$  (аналитически);
- построить линии влияния  $M$  и  $Q$  для заданного сечения, а также линию влияния одной опорной реакции  $R$  (по выбору студента);
- определить по линиям влияния значения  $M$ ,  $Q$  и  $R$  от заданной нагрузки;
- определить прогиб и угол поворота заданного сечения балки.

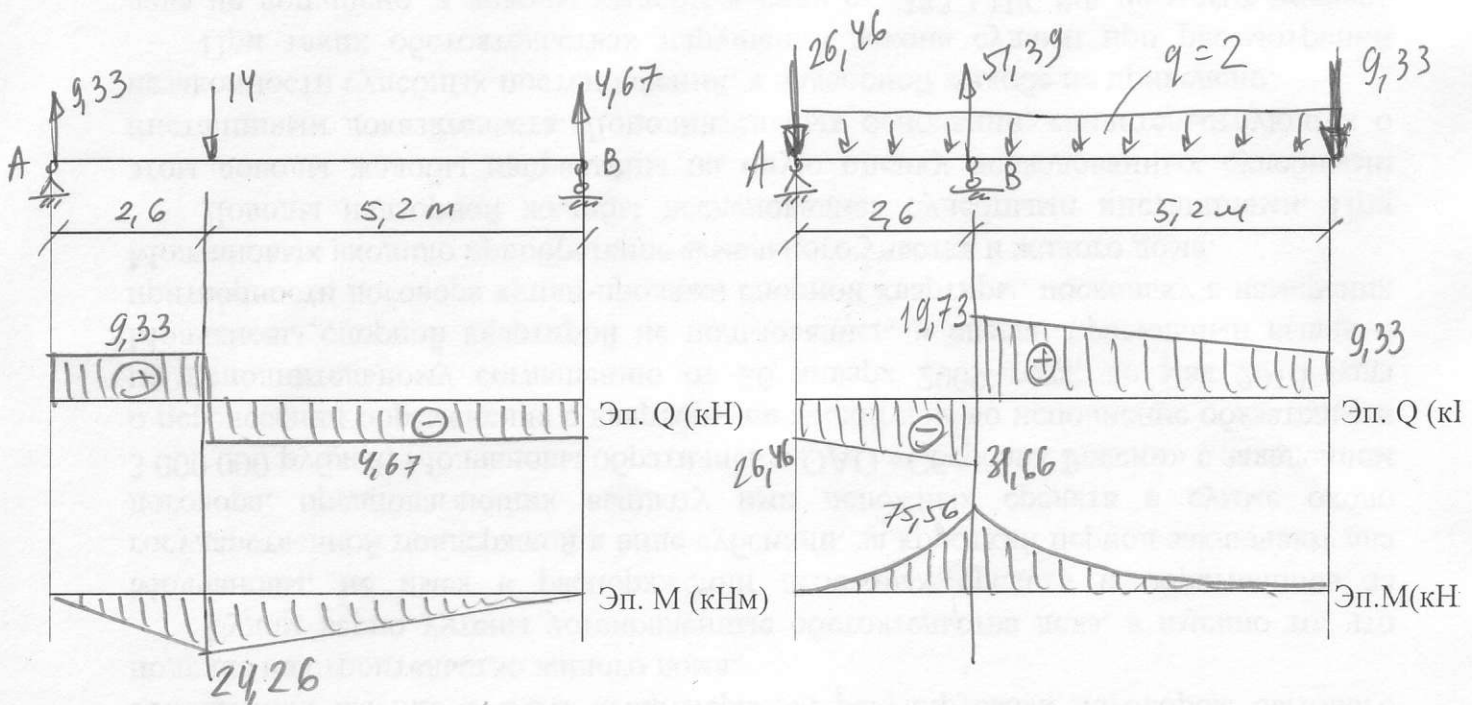
Кинематический анализ заданной балки. Степень свободы  $W$  сооружения, состоящего из  $D$  дисков, соединенных  $Ш$  простыми шарнирами и имеющего  $C$  опорных стержней, может быть определена по формуле П.Л. Чебышева:

$$W = 3D - 2Ш - C = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0.$$

Условие геометрической неизменяемости:

$$Ш = C - 3, \quad 2 = 5 - 3, \text{ следовательно, система геометрически неизменяема.}$$

Расчет данной балки ведем по частям, начиная от самых «верхних» балок и последовательно переходя к нижележащим. При расчете нижележащих балок следует учитывать не только ту нагрузку, которая к ним непосредственно приложена, но и опорные давления от верхних балок, равные опорным реакциям последних, но имеющих обратное направление.



$$\sum m_A = 0; \quad 14 \cdot 2,6 - R_B \cdot 7,8 = 0$$

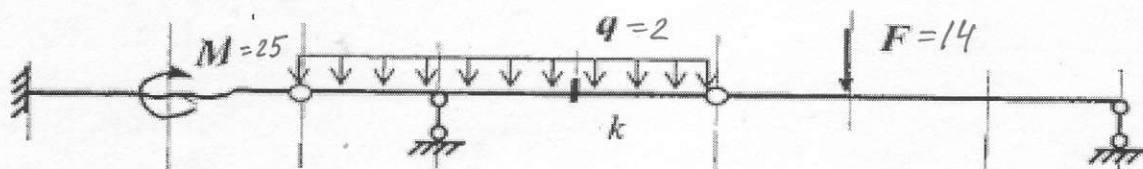
$$R_B = 4,67 \text{ кН}$$

$$\sum m_B = 0; \quad 14 \cdot 5,2 - R_A \cdot 7,8 = 0$$

$$R_A = 9,33$$

$$\sum m_A = 0; \quad 2 \cdot \frac{7,8^2}{2} + 9,33 \cdot 7,8 - R_B \cdot 2,6 = 0, \quad R_B = 51,39 \text{ кН}$$

$$\sum m_B = 0; \quad 9,33 \cdot 5,2 + 2 \cdot 5,2 \cdot 2,6 - 2 \cdot 2,6 \cdot 1,3 - R_A \cdot 2,6 = 0, \quad R_A = 26,46$$



поперечная  
схема  
балки

Эп.  $Q$  (кн)

Эп.  $M$  (ккн)

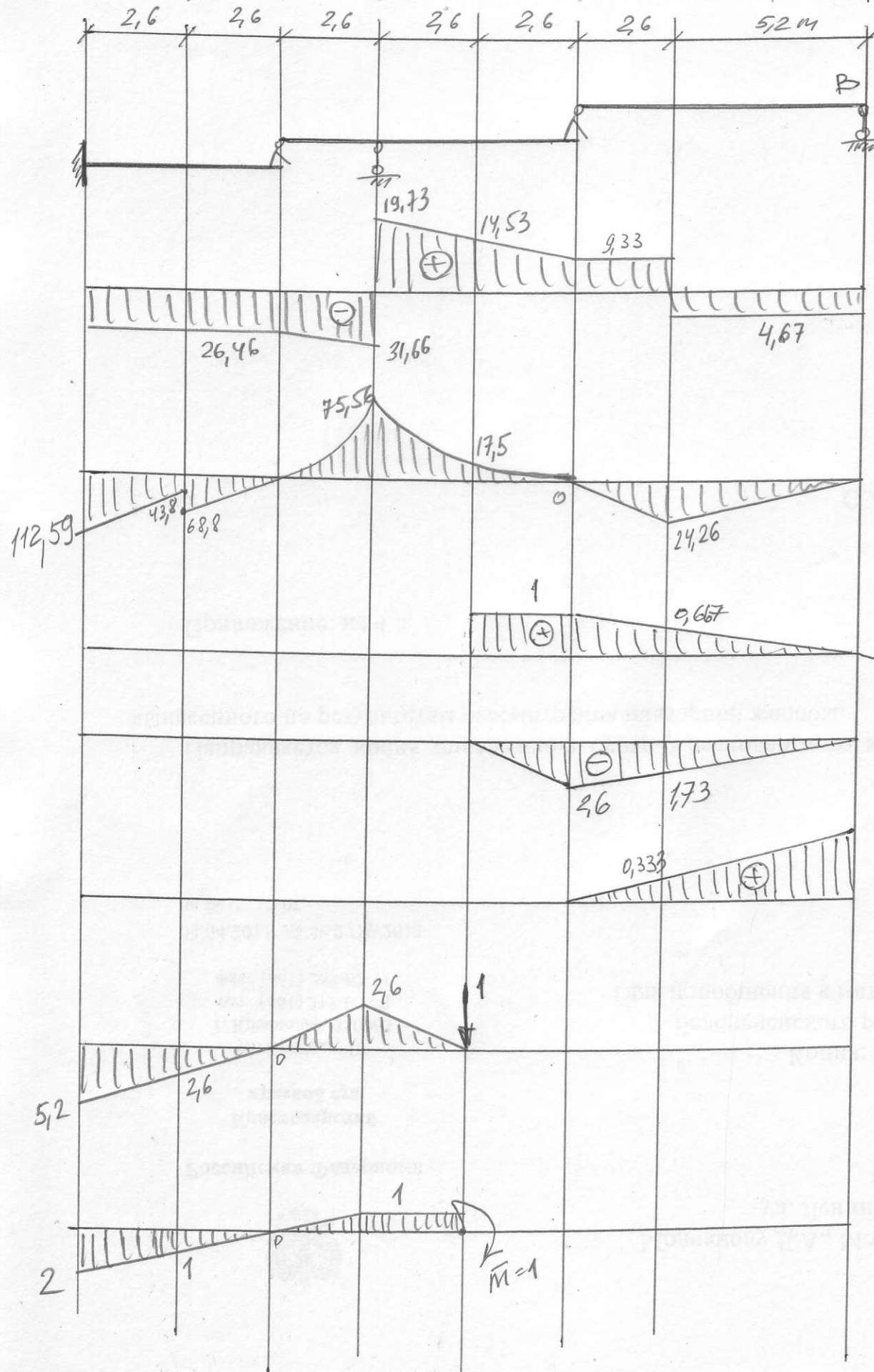
Л.В.  $Q_k$

Л.В.  $M_k$

Л.В.  $R_B$

Эп.  $\bar{M}_1$

Эп.  $\bar{M}_2$



Определение усилий по линиям влияния:

$$S = M \cdot \operatorname{tg} \alpha + F \cdot y + q \cdot \omega,$$

где  $M$  – сосредоточенный момент («+» – направлен по часовой стрелке, «-» – направлен против часовой стрелки);

$\alpha$  – наклон линии влияния в месте приложения  $M$ ;

$F$  – сосредоточенная сила («+» – направлена вниз, «-» – направлена вверх);

$y$  – ордината линии влияния под силой;

$q$  – интенсивность распределенной нагрузки («+» – направлена вниз, «-» – направлена вверх);

$\omega$  – площадь линии влияния под нагрузкой.

$$M_K = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,6 \cdot 2,6 - 14 \cdot 1,73 = -17,52 \text{ кНм}$$

$$Q_K = 2 \cdot 2,6 \cdot 1 + 14 \cdot 0,667 = 14,54 \text{ кН}$$

$$R_B = 14 \cdot 0,333 = 4,666 \text{ кН}$$

Сравнение расчетов

Наименование и размерность искомых величин	Значение искомых величин, полученных		Погрешность	
	аналитически	По линиям влияния	абсолютная	Относительная %
$M_K$ (кНм)	-17,5	-17,52	0,02	0,11
$Q_K$ (кН)	14,54	14,53	0,01	0,07
$R_B$ (кН)	4,67	4,666	0,001	0,01

Для определения прогиба и угла поворота сечения К приложим соответственно единичную силу и единичный сосредоточенный момент в данном сечении. Построим единичные эпюры изгибающих моментов от этих усилий.

При помощи интеграла Мора и правила Верещагина определим искомое перемещение перемножением единичной и грузовой эпюр изгибающих моментов.

$$\begin{aligned} \Delta_K &= \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{\bar{M}_i \cdot M_P}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left( \frac{2,6}{6} (2 \cdot 2,6 \cdot 75,56 + 2,6 \cdot 17,5) - \frac{2 \cdot 2,6^3}{12} \cdot 1,3 + \right. \\ &+ \frac{1}{2} \cdot 2,6 \cdot 2,6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 75,56 - \frac{2 \cdot 2,6^3}{12} \cdot 1,3 + \frac{1}{2} \cdot 2,6 \cdot 2,6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 68,8 + \\ &\left. + \frac{2,6}{6} (2 \cdot 5,2 \cdot 112,59 + 2 \cdot 2,6 \cdot 43,8 + 5,2 \cdot 43,8 + 112,59 \cdot 2,6) \right) = \frac{789,11}{EI} \\ \theta_K &= \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{\bar{M}_2 \cdot M_P}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} (75,56 + 17,5) \cdot 2,6 - \frac{2 \cdot 2,6^3}{12} + \frac{1}{2} \cdot 75,56 \cdot 2,6 \cdot \right. \\ &\cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{2 \cdot 2,6^3}{12} \cdot 0,5 + \frac{1}{2} \cdot 2,6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 68,8 + \frac{2,6}{6} (2 \cdot 2 \cdot 112,59 + \\ &\left. + 2 \cdot 43,8 \cdot 1 + 112,59 + 2 \cdot 43,8) \right) = \frac{601,92}{EI} \end{aligned}$$

Задавшись материалом балки и формой поперечного сечения, можно численно определить искомые перемещения.



### Задача 3

#### Расчет плоской статически определимой фермы

Для простой плоской фермы (рис. 19)\*, нагруженной в узлах верхнего пояса сосредоточенными силами  $F$ , с выбранными из табл. 4 исходными данными требуется:

- определить (аналитически) усилия в стержнях заданной панели, включая правую стойку (4 стержня);
- построить линии влияния усилий в тех же стержнях;
- по линиям влияния подсчитать значения усилий от заданной нагрузки и сравнить со значениями, полученными аналитически.

**ДАНО:**  $l = 23 \text{ м}$ ,  $h = 5,5 \text{ м}$ ,  $F = 1,6 \text{ кН}$ , 2 панель.

1. Реакции в опорах фермы:  $\sum y = 0$ ;  $V_A = V_B = 5,6 \text{ кН}$

$w = 2V - C - C_0 = 2 \cdot 12 - 21 - 3 = 0$ , следовательно, ферма статически определима и геометрически неизменяема.

2. Усилия в стержнях:  $\alpha = \arctg \frac{5,5}{11,5} = 25,56^\circ$ ;  $\sin \alpha = 0,43$ ;  $\cos \alpha = 0,9$   
 $\beta = \arctg \frac{5,5 \cdot 2}{3 \cdot 3,83} = 43,75^\circ$ ;  $\sin \beta = 0,69$ ;  $\cos \beta = 0,72$

Сеч. I-I:  $\underline{N_{1-2}}$ :  $\sum m_3^A = 0$ ,  $\underline{N_{1-2}} \cdot \cos \alpha \cdot \frac{5,5}{3} + V_A \cdot 3,83 - F \cdot 3,83 = 0$

$$\underline{N_{1-2}} = -9,28 \text{ кН}$$

$\underline{N_{2-3}}$ :  $\sum m_A^A = 0$ ,  $\underline{N_{2-3}} \cdot \sin \beta \cdot 3,83 - 1,6 \cdot 3,83 = 0$ ,

$$\underline{N_{2-3}} = 2,32 \text{ кН}$$

$\underline{N_{3-4}}$ :  $\sum m_2^A = 0$ ,  $\underline{N_{3-4}} \cdot 3,67 + 5,6 \cdot 7,66 + F \cdot 3,83 + F \cdot 7,66 = 0$

$$\underline{N_{3-4}} = +6,68 \text{ кН}$$

$\underline{N_{1-3}}$ :  $\sum m_A^A = 0$ ,  $\underline{N_{1-3}} \cdot 3,83 + F \cdot 3,83 = 0$

$$\underline{N_{1-3}} = -1,6 \text{ кН}$$

$\underline{N_{2-4}}$ :  $\sum m_A^A = 0$ ,  $\underline{N_{2-4}} \cdot 7,66 + F \cdot 7,66 + F \cdot 3,83 = 0$

$$\underline{N_{2-4}} = -2,4 \text{ кН}$$

3. Построение линий влияния:

Сеч. I-I:  $\underline{N_{1-2}}$ :  $p=1$  — слева,  $\sum m_3^A = 0$ ,  $\underline{N_{1-2}} \cdot \cos \alpha \cdot 3,67 - N_{12} \sin \alpha \cdot 3,83 + V_B \cdot 19,15 = 0$   
 $N_{12} = -11,56 V_B$

$p=1$  — справа,  $\sum m_3^A = 0$ ,  $\underline{N_{1-2}} \cdot \cos \alpha \cdot \frac{5,5}{3} + V_A \cdot 3,83 = 0$ ,  $N_{12} = -2,32 V_A$

$\underline{N_{2-3}}$ :  $p=1$  — слева,  $\sum m_A^A = 0$ ,  $\underline{N_{2-3}} \cdot \sin \beta \cdot 7,66 - N_{23} \cos \beta \cdot 3,67 - V_B \cdot 23 = 0$   
 $N_{23} = 8,7 V_B$

$$p=1 - \text{справа, } \sum m_A^{\wedge} = 0, \underline{N_{2-3}} \cdot \sin \beta \cdot 3,83 = 0 ; N_{23} = 0$$

$$\underline{N_{3-4}}: p=1 - \text{слева, } \sum m_2^{\eta} = 0, \underline{N_{3-4}} \cdot 3,67 - V_B \cdot 3,83 \cdot 4 = 0; N_{34} = 4,17 V_B$$

$$p=1 - \text{справа, } \sum m_2^{\wedge} = 0, \underline{N_{3-4}} \cdot 3,67 - V_A \cdot 7,66 = 0 ; N_{34} = 2,09 V_A$$

$$\underline{N_{1-3}}: p=1 - \text{слева, } \sum m_A^{\eta} = 0, \underline{N_{1-3}} \cdot 3,83 + V_B \cdot 23 = 0, N_{13} = -6 V_B$$

$$p=1 - \text{справа, } \sum m_A^{\wedge} = 0, \underline{N_{1-3}} \cdot 3,83 = 0; N_{13} = 0$$

$$\underline{N_{2-4}}: p=1 - \text{слева, } \sum m_A^{\eta} = 0, \underline{N_{2-4}} \cdot 7,66 + V_B \cdot 23 = 0; N_{24} = -3 V_B$$

$$p=1 - \text{справа, } \sum m_A^{\wedge} = 0, \underline{N_{2-4}} \cdot 7,66 = 0, N_{24} = 0$$

Определение усилий по линиям влияния:

$$\underline{N_{1-2}} = -1,6(1,93 + 1,55 + 1,16 + 0,77 + 0,39) = -9,28 \text{ кН}$$

$$\underline{N_{2-3}} = 1,6 \cdot 1,45 = 2,32 \text{ кН}$$

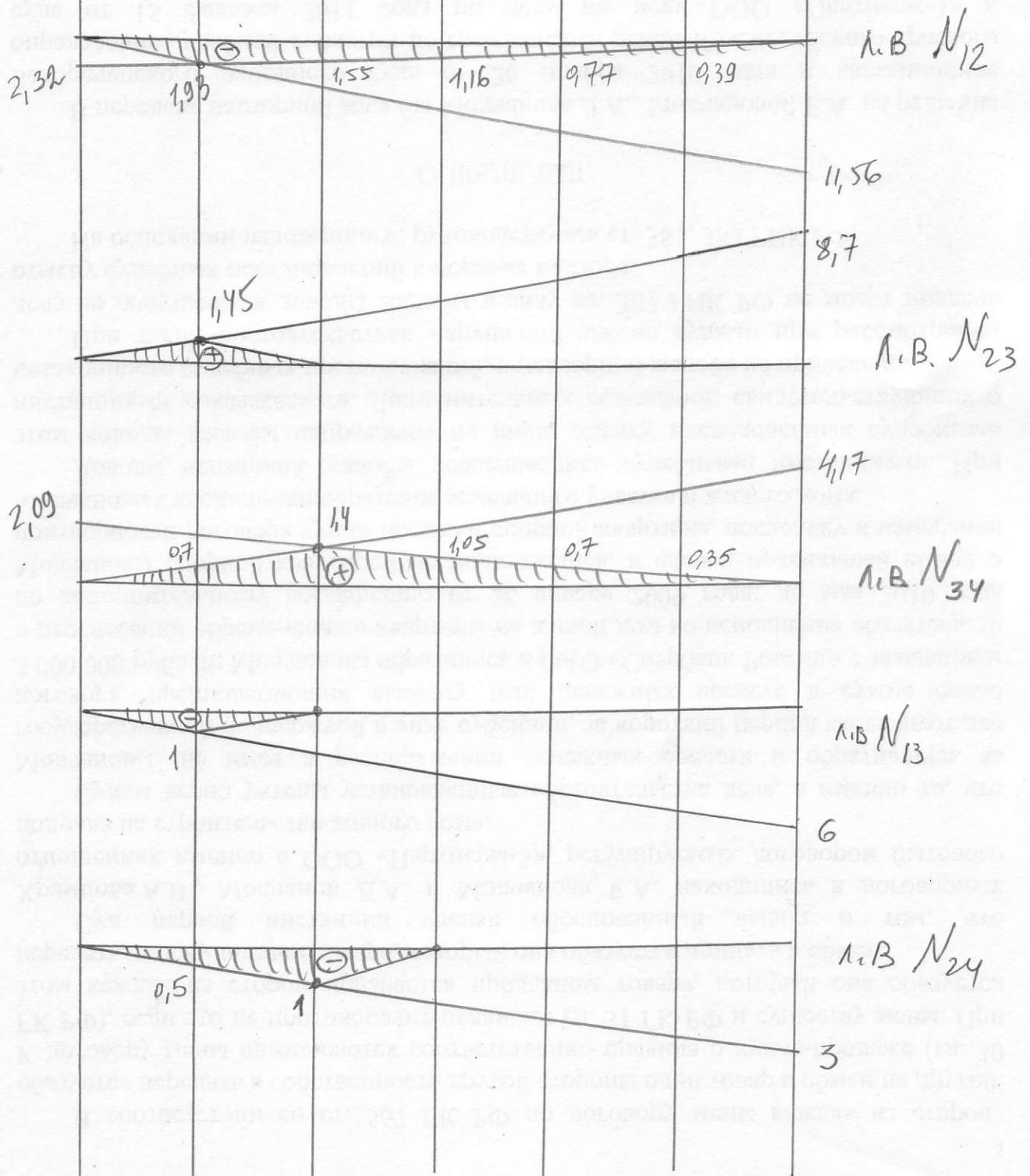
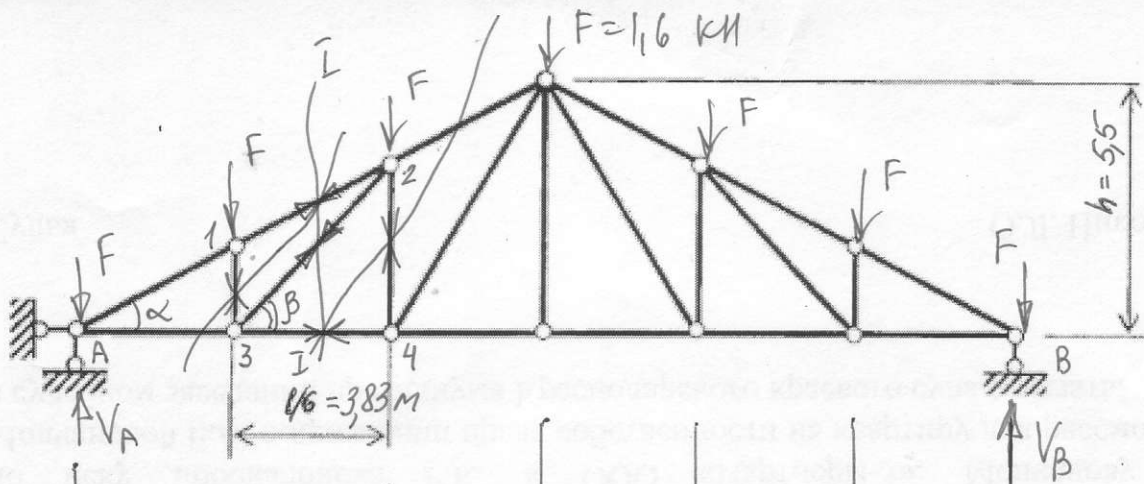
$$\underline{N_{3-4}} = 1,6(0,7 + 1,4 + 1,05 + 0,7 + 0,35) = 6,67$$

$$\underline{N_{1-3}} = -1,6 \cdot 1 = -1,6 \text{ кН}$$

$$\underline{N_{2-4}} = -1,6(0,5 + 1) = -2,4 \text{ кН}$$

Таблица сравнения усилий:

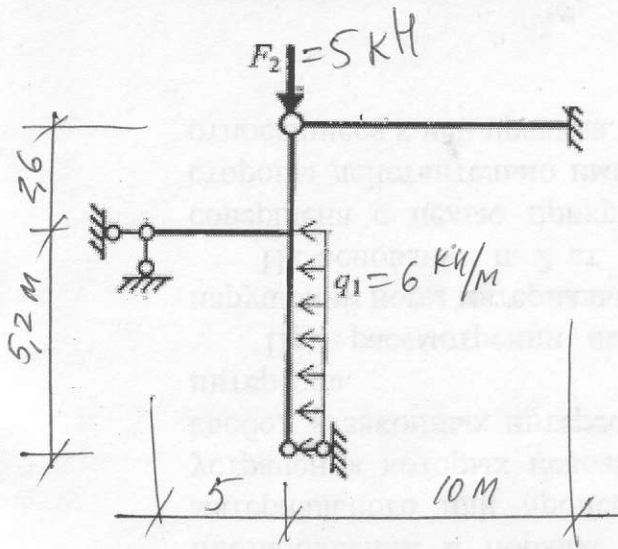
Усилия	Аналитический расчет	Расчет по линии влияния	Погрешность (%)
$N_{1-2}$	-9,28	-9,28	0,00
$N_{2-3}$	2,32	2,32	0,00
$N_{3-4}$	6,68	6,67	0,15
$N_{1-3}$	-1,6	-1,6	0,00
$N_{2-4}$	-2,4	-2,4	0,00





Задача-4а «Расчет статически неопределимой рамы методом сил»

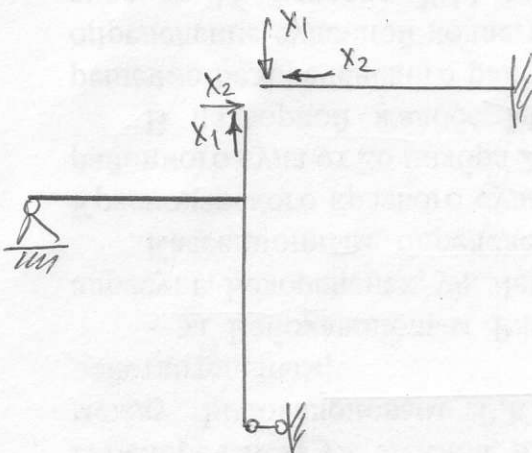
$$\gamma_p : \gamma_c = 2 : 3$$



1. Степень статической неопределимости:  $n = 3K - III = 3 \cdot 2 - 4 = 2$

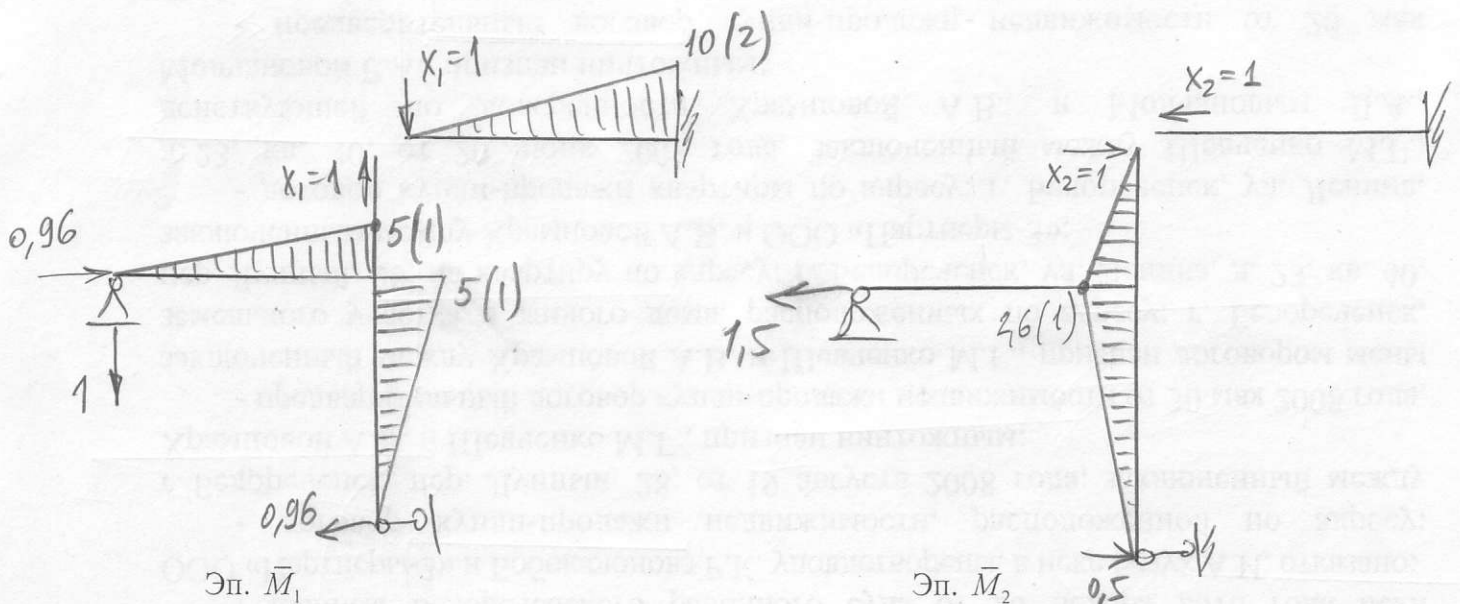
2. Система канонических уравнений:

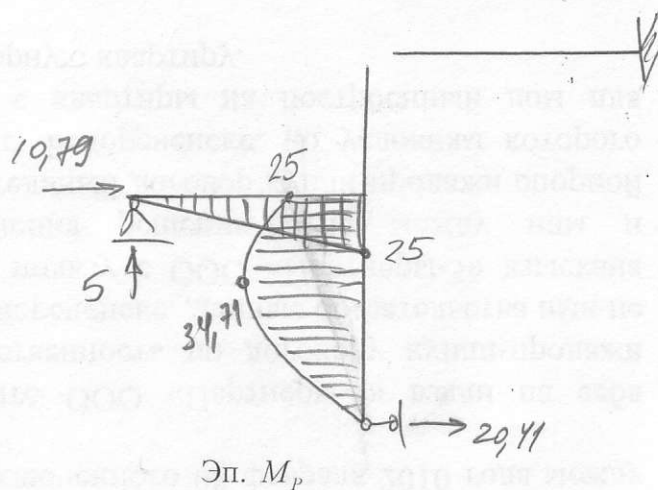
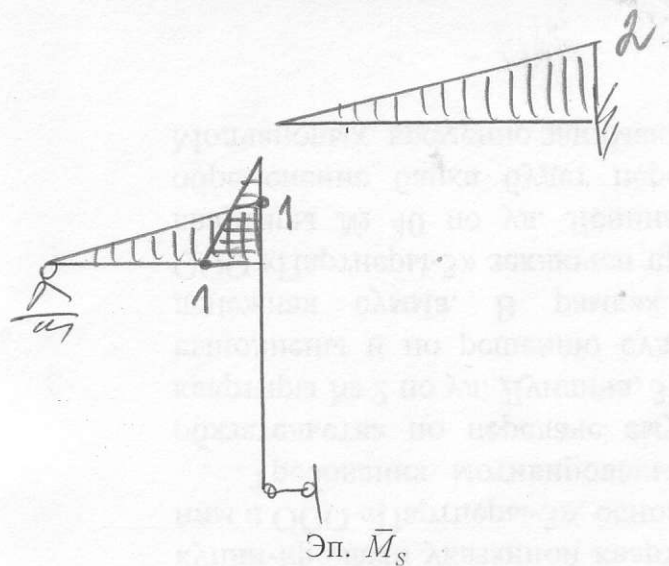
$$\begin{cases} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$



Основная система

3. Построение единичных и грузовой эпюр изгибающих моментов:





4. Определение коэффициентов и свободных членов канонических уравнений и их проверка

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} 1 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} 2 \cdot 10 \cdot \frac{2}{3} 2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} 1 \cdot 5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{8,08}{EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_2}{EI} dx = \frac{-1}{3EI} \left( \frac{1}{2} 1 \cdot 5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} 1 \right) = \frac{-0,58}{EI}$$

$$\delta_{22} = \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{\bar{M}_2 \cdot \bar{M}_2}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \left( \frac{1}{2} 5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} 1 + \frac{1}{2} 2 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} 1 \right) = \frac{0,87}{EI}$$

$$\Delta_{1p} = \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \cdot M_p}{EI} dx = \frac{-1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} 25 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} 25 \cdot 5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} 1 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 2^3}{3 \cdot 12} \cdot 0,5 \right) = \frac{-47}{EI}$$

$$\Delta_{2p} = \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{\bar{M}_2 \cdot M_p}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \left( \frac{1}{2} 5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} 25 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 2^3}{12} \cdot 0,5 \right) = \frac{26,16}{EI}$$

$$\sum \delta_{ik} = \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{\bar{M}_s \cdot \bar{M}_s}{EI} dx, \quad \sum \delta_{ik} = \delta_{11} + 2\delta_{12} + \delta_{22} = \frac{8,08 - 0,58 \cdot 2 + 0,87}{EI} = \frac{7,79}{EI}$$



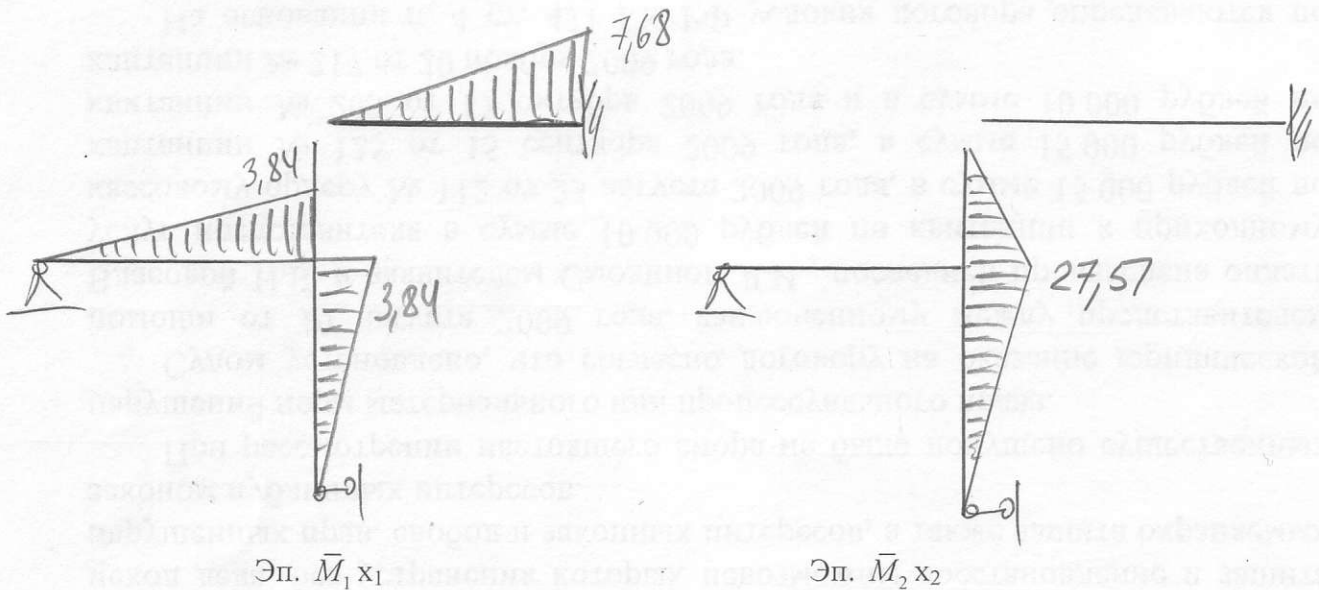
$$\sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{\bar{M}_S \cdot \bar{M}_S}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,6 \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{7,79}{EI}$$

$$\sum \Delta_{ik} = \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{\bar{M}_S \cdot M_P}{EI} dx, \quad \sum \Delta_{ik} = \Delta_{1p} + \Delta_{2p} = \frac{-47 + 26,16}{EI} = \frac{-20,84}{EI}$$

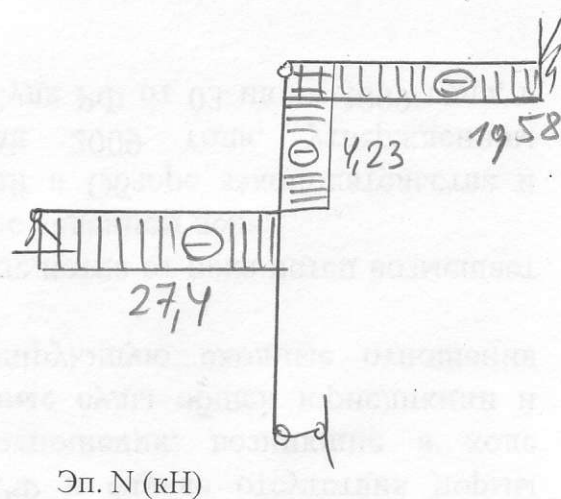
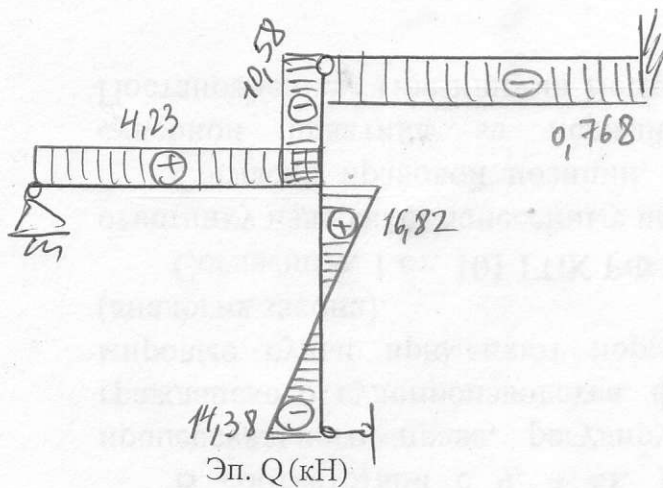
$$\sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{\bar{M}_S \cdot M_P}{EI} dx = \frac{-1}{2EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 25 \right) = \frac{-20,83}{EI} \approx \frac{-20,84}{EI}$$

5. Решение системы канонических уравнений и построение окончательной эпюры моментов в заданной системе

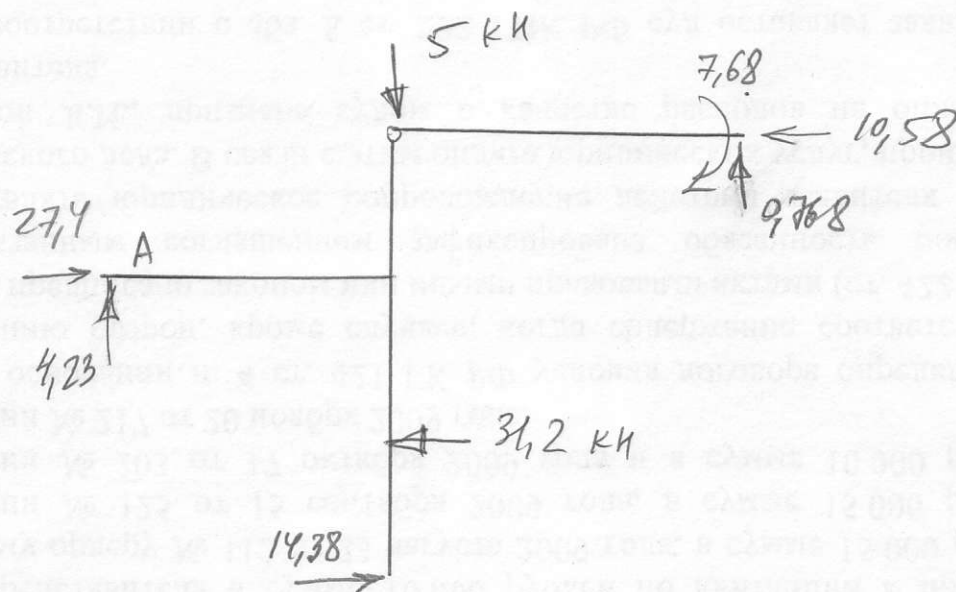
$$\begin{cases} 8,08x_1 - 0,58x_2 = 47 \\ -0,58x_1 + 0,87x_2 = -26,16 \end{cases} \begin{cases} x_1 = 3,84 \text{ кН} \\ x_2 = -27,57 \text{ кН} \end{cases}$$







8. Проверка правильности построения эпюр Q и N



$$\sum x = 0, \quad 14,38 + 27,4 - 31,2 - 10,58 = 0$$

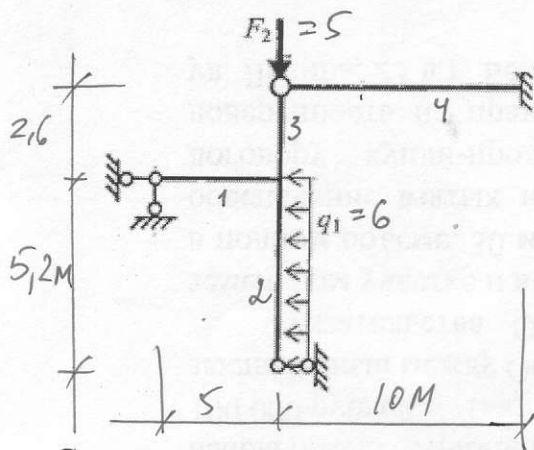
$$\sum y = 0, \quad 4,23 - 5 + 0,768 = -0,002 \approx 0$$

$$\sum m_A = 0, \quad 14,38 \cdot 5,2 - 31,2 \cdot 2,6 - 5 \cdot 5 - 7,68 + 0,768 \cdot 15 + 10,58 \cdot 2,6 = 0,021 \approx 0$$



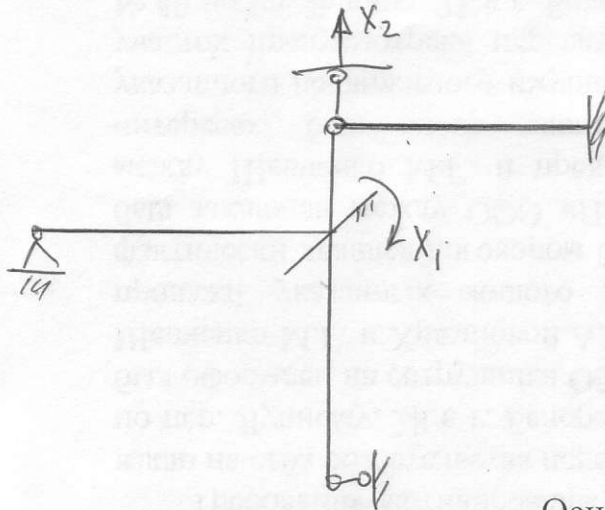
Задача

РР-46 «Расчет статически неопределимых рам методом перемещений».



$$\gamma_p: \gamma_c = 2:3$$

Степень кинематической неопределимости:  $n = n_y + 3D - 2\Pi = 1 + 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 2$ ,

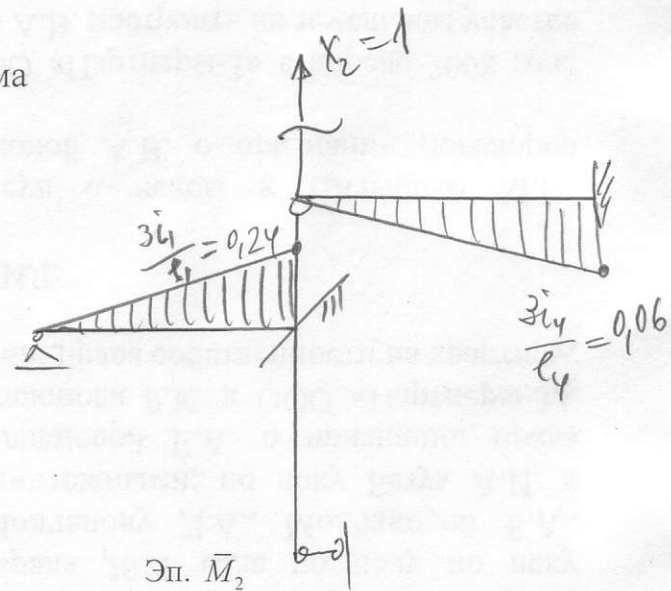
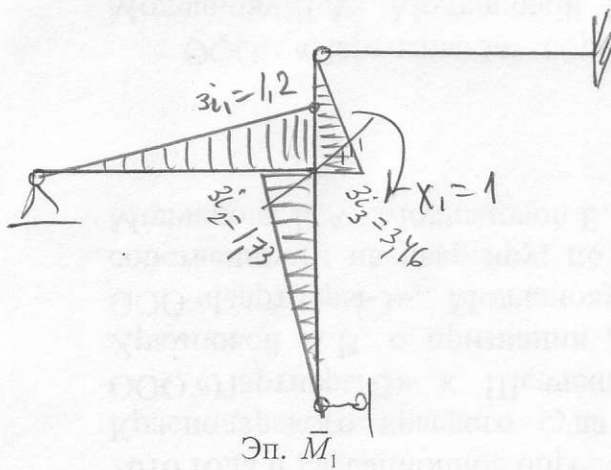


$$i_1 = \frac{2EI}{5} = 0,4, \quad i_2 = \frac{3EI}{5,2} = 0,577$$

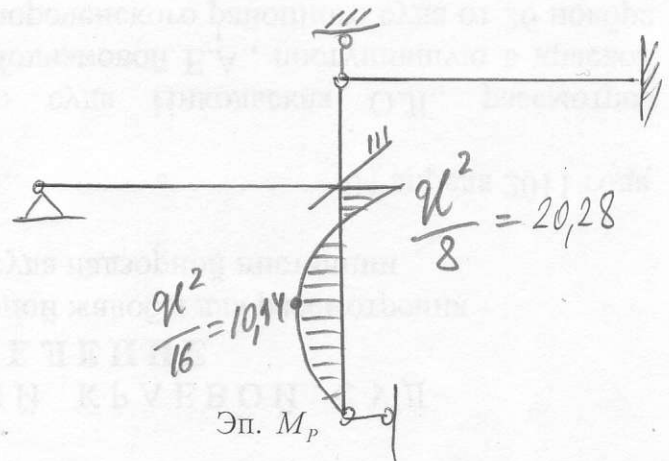
$$i_3 = \frac{3EI}{2,6} = 1,154, \quad i_4 = \frac{2EI}{10} = 0,2$$

$$\begin{cases} r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + R_{1p} = 0 \\ r_{21}x_1 + r_{22}x_2 + R_{2p} = 0 \end{cases}$$

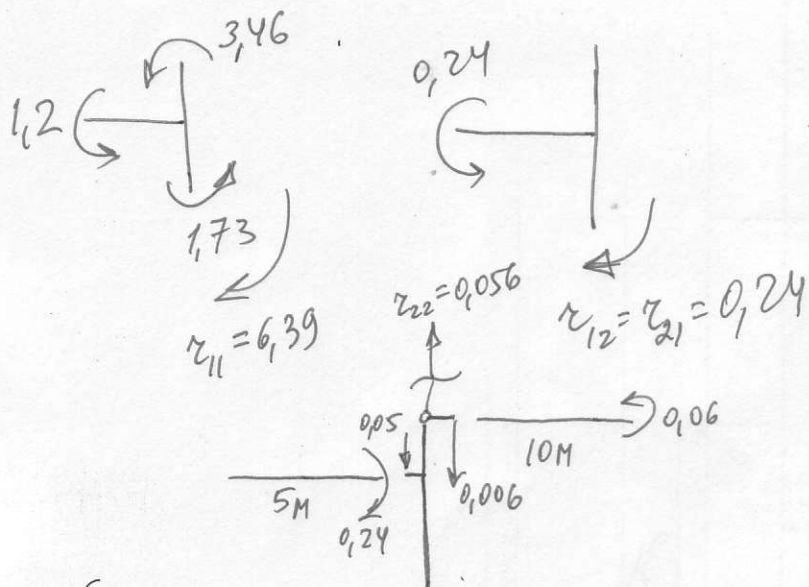
Основная система



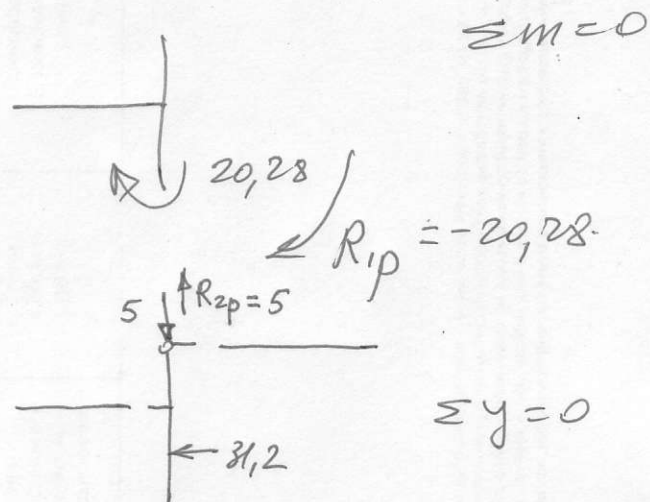
Построение единичных и грузовой эпюр моментов:



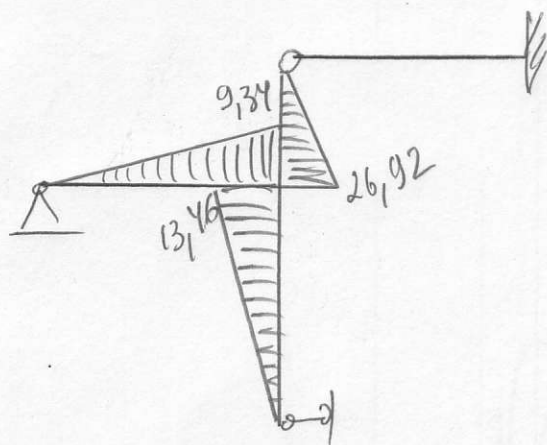
Определение коэффициентов канонических уравнений:



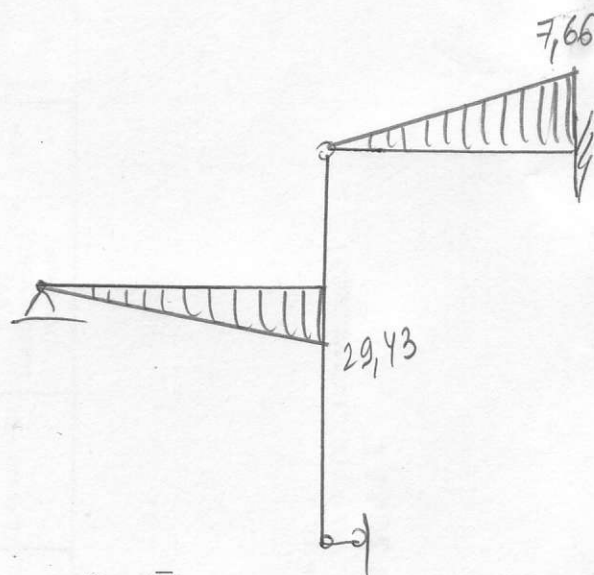
$$\begin{cases} 6,39 X_1 + 0,24 X_2 = 20,28 \\ 0,24 X_1 + 0,056 X_2 = -5 \end{cases}$$



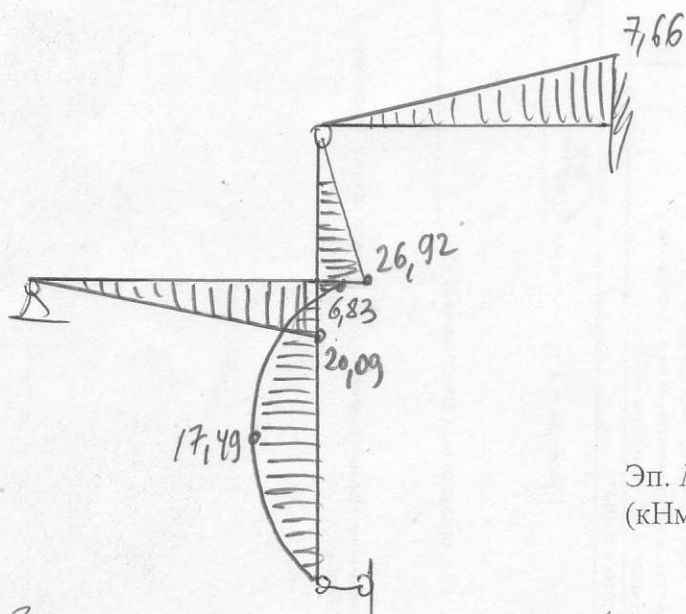
$$\begin{cases} X_1 = 7,78 \\ X_2 = -122,63 \end{cases}$$



Эп.  $\bar{M}_1 x_1$



Эп.  $\bar{M}_2 x_2$



Эп.  $M$   
(кНм)

Построение окончательной эпюры  $M$ :

$$M = M_1 x_1 + M_2 x_2 + M_p$$

Значения ординат на эп.  $M$  отличаются незначительно от результатов метода сил (за счет округлений), значит расчет сделан верно.